Symbolic Characterizations for Q-matrices

by **Khalil Ghorbal** and Christelle Kozaily (Inria, Rennes)
on November 15, 2024

PolySys Seminar, LIP6, Paris

» Linear Complementarity Problem (LCP)

$q \in \mathbb{R}^n$, $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $\mathrm{LCP}(q, M)$ is the following sentence

$$\exists w, z \in \mathbb{R}^n, \begin{array}{l} w = q + Mz \\ 0 \leq w \perp z \geq 0 \end{array}$$

* Linear and quadratic Programming
* Several applications in engineering, economics etc.
* The LCP Book by Cottle, Pang and Stone (1992)

» Linear Complementarity

$$0 \leq w \perp z \geq 0$$

if and only if

$$w \geq 0 \land z \geq 0 \land w.z = 0$$

if and only if

$$\forall i,\ w_i \geq 0 \land z_i \geq 0 \land w_i z_i = 0$$

» Related classes of Matrices

M is a Q-matrix: there exists a solution for all q.

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \exists w, z \in \mathbb{R}^n, \begin{array}{l} w = q + Mz \\ 0 \leq z \perp w \geq 0 \end{array}$$

» Related classes of Matrices

M is a Q-matrix: there exists a solution for all q.

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \exists w, z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} w = q + Mz \\ 0 \leq z \perp w \geq 0 \end{array}$$

M is an S-matrix: there exists a partial solution for all q.

$$\forall q \in \mathbb{R}^n, \exists w, z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} w = q + Mz \\ z, w \geq 0 \end{array}$$

» Related classes of Matrices

M is a Q-matrix: there exists a solution for all q.

$$\forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, \exists w, z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} w = q + Mz \\ 0 \leq z \perp w \geq 0 \end{array}$$

M is an S-matrix: there exists a partial solution for all q.

$$\forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, \exists w, z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} w = q + Mz \\ z, w \geq 0 \end{array}$$

M is a P-matrix: there exists unique solution for all q.

$$\forall \boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n, \exists! w, z \in \mathbb{R}^n, \quad \begin{array}{l} w = q + Mz \\ 0 \leq z \perp w \geq 0 \end{array}$$

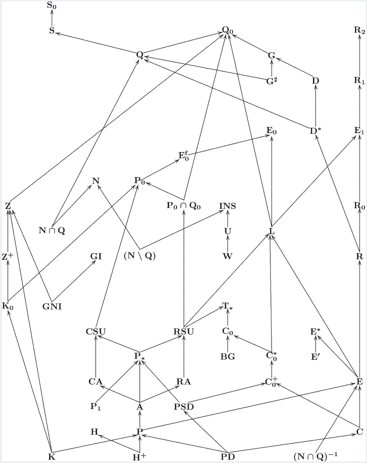
» Feasibility, Solvability, Partitioning

» State of affairs

somehow unsatisfactory...

5 Matrix class inclusion map

See Fig. 1.



» Time complexity of recognizing a Q-matrix

Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)

* Collins (1975) $(6n)^{2^{O(n)}}$
* Grigor'ev (1985) $(6n)^{O(n)^8}$
* Renegar (1992) $(6n)^{O(n^2)}$

» Time complexity of recognizing a Q-matrix

M is fixed

Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)

* Collins (1975) $(6n)^{2^{O(n)}}$
* Grigor'ev (1985) $(6n)^{O(n)^8}$
* Renegar (1992) $(6n)^{O(n^2)}$

Specialized algorithms

* Gale (∼1965) 2^{2^n}
* Naiman and Stone (1998) $O(2^{O(n^2)})$
* De. Loera and Morris (1999) $2^{\binom{2n}{n}} \sim 2^{O(2^{2n})}$

» Complexity of characterizing Q-matrices

Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)

* Collins (1975) $O(n)^{2^{O(n^2)}}$
* Grigor'ev (1985) $O(n)^{O(n^2)^8}$
* Renegar (1992) $O(n)^{O(n^4)}$

» Complexity of characterizing Q-matrices

Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)

* Collins (1975) $O(n)^{2^{O(n^2)}}$
* Grigor'ev (1985) $O(n)^{O(n^2)^8}$
* Renegar (1992) $O(n)^{O(n^4)}$

Specialized algorithms

* ...

» Complexity of characterizing Q-matrices

Cylindrical Algebraic Decomposition (CAD)

* Collins (1975) $O(n)^{2^{O(n^2)}}$
* Grigor'ev (1985) $O(n)^{O(n^2)^8}$
* Renegar (1992) $O(n)^{O(n^4)}$

Specialized algorithms

* ...

Limited to $n = 2$.

» Outline for this talk

* Triangulation with minimal cones
* An alternatives theorem
* Holes for $n = 3$
* Symbolic characterization for $n = 3$

» Feasibility

$$\begin{aligned} w &= q + Mz \\ 0 \leq w &\perp z \geq 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} I & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \\ & w \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge w.z = 0 \end{aligned}$$

» Feasibility

$$\begin{aligned} w &= q + Mz \\ 0 \leq w &\perp z \geq 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} I & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \\ w &\geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge w.z = 0 \end{aligned}$$

* q belongs to $\Gamma = \langle e_1, \ldots, e_n, -M_1, \ldots, -M_n \rangle$
* Under which conditions on M, the cone Γ covers $\mathbb{R}^n$?

» Feasibility

$$\begin{aligned} w &= q + Mz \\ 0 &\leq w \perp z \geq 0 \end{aligned} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{aligned} q &= \begin{pmatrix} I & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix} \\ & w \geq 0 \wedge z \geq 0 \wedge w.z = 0 \end{aligned}$$

* q belongs to $\Gamma = \langle e_1, \ldots, e_n, -M_1, \ldots, -M_n \rangle$
* Under which conditions on M, the cone Γ covers $\mathbb{R}^n$?

Proposition

Let $k \geq n+1$ and $g_1, \ldots, g_k$ denote k non-zero vectors of $\mathbb{R}^n$. If $\langle g_1, \ldots, g_k \rangle = \mathbb{R}^n$ then there exist $i_1, \ldots, i_{m+1}$, $1 \leq m \leq n$, such that $\langle i_1, \ldots, i_{m+1} \rangle$ is a flat of dimension m.

» Example

Suppose $\langle g_1, \ldots, g_6 \rangle = \mathbb{R}^3$.

$\Gamma = \mathbb{R}^n$: the space can be triangulated by minimal cones.

Proposition

Assume $\Gamma = \mathbb{R}^n$. Then for any $x \in \mathbb{R}^n$, there exists a minimal cone $G \in \mathsf{Cones}(\Gamma)$ containing x, that is G is full and for any other full cone $G' \in \mathsf{Cones}$, $G' \subseteq G$ implies $G' = G$.

» Complementary Cones

$$w = q + Mz \qquad \rightsquigarrow \qquad q = (I \quad -M)\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \qquad\qquad w, z \geq 0 \wedge w.z = 0$$

- $C = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $a_i \in \{I_i, -M_i\}$
- 2^n complementarity cones C_k
- Cones are sewed along their common facets
- M is a Q-matrix if all cones cover $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\mathbb{R}^n \subseteq \Sigma := \cup_k C_k$$

» Examples $n = 2$

» Dyadic covering

Proposition

The cone $\langle e_i, -M_i \rangle$ cannot be partially covered, i.e., either $\langle e_i, -M_i \rangle \subseteq \Sigma$ or $\langle e_i, -M_i \rangle^\circ \subseteq \Sigma^c$.

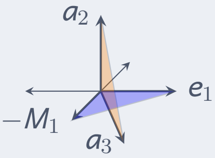
» Dyadic covering

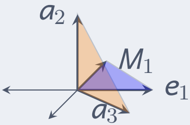
Proposition

The cone $\langle e_i, -M_i \rangle$ cannot be partially covered, i.e., either $\langle e_i, -M_i \rangle \subseteq \Sigma$ or $\langle e_i, -M_i \rangle^\circ \subseteq \Sigma^c$.

Proposition

The cone $\langle e_i, -M_i \rangle$ is covered if and only if one of the following intersections occur





» Holes

$n = 3$

» Holes

$n = 3$

Definition (Surrounding)

A vector q is surrounded if it has a covered neighborhood. ($U \subseteq \Sigma$.)

» Local Characterization

Theorem

$\mathbb{R}^3 \subseteq \Sigma$ if and only if, for all i, both a_i and a_i' are surrounded.

» Local Characterization

Theorem

$\mathbb{R}^3 \subseteq \Sigma$ if and only if, for all i, both a_i and a_i' are surrounded.

$$\begin{pmatrix} \frac{1561}{624} & \frac{278921}{94224} & -\frac{2029}{624} & -\frac{82117}{224640} \\ \frac{523}{624} & \frac{30971}{94224} & -\frac{679}{624} & \frac{85409}{224640} \\ \frac{223}{156} & \frac{33071}{23556} & -\frac{379}{156} & \frac{437}{56160} \\ \frac{75}{13} & \frac{11175}{1963} & -\frac{75}{13} & -\frac{305}{312} \end{pmatrix}$$

» Local Characterization (bis)

Theorem

Assume $\mathbb{R}^3 \subseteq \Gamma$. $\mathbb{R}^3 = \Sigma$ if and only if, for each i, either a_i is self surrounded or lazily covered.

» Local Characterization (bis)

Theorem

Assume $\mathbb{R}^3 \subseteq \Gamma$. $\mathbb{R}^3 = \Sigma$ if and only if, for each i, either a_i is self surrounded or lazily covered.

- Self surrounding is equivalent to Q-covering
- Lazy covering is a cone membership

» Q-matrices for $n = 2$

Theorem

The matrix $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ *is a Q-matrix if and only if*

$$
\begin{aligned}
&(m_1 > 0 \land m_2 \geq 0 \land m_4 > 0) \\
\lor &(m_1 > 0 \land m_3 = 0 \land m_4 > 0) \\
\lor &(m_1 = 0 \land m_2 > 0 \land m_3 < 0 \land m_4 > 0) \\
\lor &(m_1 < 0 \land m_2 > 0 \land m_3 < 0 \land 0 > m_1 m_4 > m_2 m_3) \\
\lor &(m_1 < 0 \land m_2 > 0 \land m_3 > 0 \land m_2 m_3 > m_1 m_4 > 0) \\
\lor &(m_1 > 0 \land m_2 < 0 \land m_3 < 0 \land m_1 m_4 > m_2 m_3) \\
\lor &(m_1 > 0 \land m_2 < 0 \land m_3 > 0 \land m_1 m_4 > m_2 m_3)
\end{aligned}
$$

» Q-matrices for $n = 2$

Theorem

The matrix $\left(\begin{smallmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{smallmatrix}\right)$ *is a Q-matrix if and only if*

$$\begin{aligned}
&(m_1 > 0 \wedge m_2 \geq 0 \wedge m_4 > 0) \\
\vee&(m_1 > 0 \wedge m_3 = 0 \wedge m_4 > 0) \\
\vee&(m_1 = 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 < 0 \wedge m_4 > 0) \\
\vee&(m_1 < 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 < 0 \wedge 0 > m_1 m_4 > m_2 m_3) \\
\vee&(m_1 < 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 > 0 \wedge m_2 m_3 > m_1 m_4 > 0) \\
\vee&(m_1 > 0 \wedge m_2 < 0 \wedge m_3 < 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3) \\
\vee&(m_1 > 0 \wedge m_2 < 0 \wedge m_3 > 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3)
\end{aligned}$$

Theorem

The matrix $\left(\begin{smallmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{smallmatrix}\right)$ *is a P-matrix if and only if*

$$m_1 > 0 \wedge m_4 > 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3 \ .$$

» Q-matrices for $n = 3$

```
 0 &&
(m2 m4 - m1 m5) (-m3 m4 + m1 m6) + (-m2 m7 + m1 m8) (m3 m7 - m1 m9) + (m5 m7 - m4 m8) (-m6 m7 + m4 m9) >
 0 &&
((-m3 m8 + m2 m9 > 0 && -m6 m8 + m5 m9 > 0) || (-m3 m8 + m2 m9 < 0 && -m6 m8 + m5 m9 < 0)) &&
! (! -m1 == -m4 == 0 && ((m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7)) (m4 (m1 - m2 m4 + m1 m5) m7 - m1 (m1 m2 m7 + m4 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0 ||
    (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^3 - m1 m4^2 > 0 && m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 > 0) ||
    (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^3 - m1 m4^2 < 0 && m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 < 0) ||
    (-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 == 0 && -m1 (-m2 m4 + m1 m5) - m4 m7 (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
      (m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7))^2 < 0) || (-m1^3 - m1 m4^2 == 0 && -m4 (m1^2 + m4^2) m7 > 0 &&
      (m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7)) (m4 (m1 - m2 m4 + m1 m5) m7 - m1 (m1 m2 m7 + m4 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0)) &&
  ((m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 > 0 && m1^3 + m1 m4^2 > 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0) ||
    (m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 < 0 && m1^3 + m1 m4^2 < 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0) ||
    ((m1^2 + m4^2)^2 > 0 && -m1 (-m1^2 - m4^2)^2 (-m2 m4 + m1 m5) < 0)) &&
  (((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))
      ((-m1 + m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0 ||
    (-m1^3 - m1 m4^2 > 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 > 0) ||
    (-m1^3 - m1 m4^2 < 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 < 0) ||
    (m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 == 0 && -m1 (-m2 m4 + m1 m5) - m4 m7 (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
      ((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))^2 < 0) ||
    (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 == 0 && (m1^2 + m4^2) (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
      ((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))
        ((-m1 + m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0)) &&
  ((-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 > 0 && m1^2 m2 m4 + m2 m4^3 - m1^3 m5 - m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^3 - m1 m4^2 > 0) ||
    (-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 < 0 && m1^2 m2 m4 + m2 m4^3 - m1^3 m5 - m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^3 - m1 m4^2 < 0) ||
    ((m1^2 + m4^2)^2 > 0 && -m1 (-m1^2 - m4^2)^2 (-m2 m4 + m1 m5) < 0))) &&
! ((-m2 m4 + m1 m5 == 0 && m2^2 m4 - m1 m2 m5 == 0 && m2 m4 m5 - m1 m5^2 == 0 && m2 m4 m8 - m1 m5 m8 == 0 && m2 (m2 m7 - m1 m8) - m5 (-m5 m7 + m4 m8) > 0 &&
    -m2 m4 + m1 m5 == 0 && -m1 m2 - m4 m5 > 0) || (m2 m4 - m1 m5 == 0 && -m2^2 m4 + m1 m2 m5 == 0 && -m2 m4 m5 + m1 m5^2 == 0 &&
    -m2 m4 m8 + m1 m5 m8 == 0 && m2 (-m2 m7 + m1 m8) - m5 (m5 m7 - m4 m8) > 0 && m2 m4 - m1 m5 == 0 && m1 m2 + m4 m5 > 0))) ||
(-m3 m5 m7 + m2 m6 m7 + m3 m4 m8 - m1 m6 m8 - m2 m4 m9 + m1 m5 m9 == 0 && m3^2 m5 m7 - m2 m3 m6 m7 - m3^2 m4 m8 + m1 m3 m6 m8 +
    m2 m3 m4 m9 - m1 m3 m5 m9 == 0 &&
 m3 m5 m6 m7 - m2 m6^2 m7 - m3 m4 m6 m8 + m1 m6^2 m8 + m2 m4 m6 m9 - m1 m5 m6 m9 ==
  0 &&
 m3 m5 m7 m9 - m2 m6 m7 m9 - m3 m4 m8 m9 + m1 m6 m8 m9 + m2 m4 m9^2 - m1 m5 m9^2 ==
```

» Q-matrices for $n = 3$

```
 0 &&
(m2 m4 - m1 m5) (-m3 m4 + m1 m6) + (-m2 m7 + m1 m8) (m3 m7 - m1 m9) + (m5 m7 - m4 m8) (-m6 m7 + m4 m9) >
 0 &&
((-m3 m8 + m2 m9 > 0 && -m6 m8 + m5 m9 > 0) || (-m3 m8 + m2 m9 < 0 && -m6 m8 + m5 m9 < 0)) &&
! (! -m1 == -m4 == 0 && ((m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7)) (m4 (m1 - m2 m4 + m1 m5) m7 - m1 (m1 m2 m7 + m4 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0 ||
     (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^3 - m1 m4^2 > 0 && m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 > 0) ||
     (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^3 - m1 m4^2 < 0 && m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 < 0) ||
     (-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 == 0 && -m1 (-m2 m4 + m1 m5) - m4 m7 (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
       (m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7))^2 < 0) || (-m1^3 - m1 m4^2 == 0 && -m4 (m1^2 + m4^2) m7 > 0 &&
       (m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7)) (m4 (m1 - m2 m4 + m1 m5) m7 - m1 (m1 m2 m7 + m4 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0)) &&
   ((m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 > 0 && m1^3 + m1 m4^2 > 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0) ||
     (m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 < 0 && m1^3 + m1 m4^2 < 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0) ||
     ((m1^2 + m4^2)^2 > 0 && -m1 (-m1^2 - m4^2)^2 (-m2 m4 + m1 m5) < 0)) &&
   (((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))
       ((-m1 + m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0 ||
     (-m1^3 - m1 m4^2 > 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 > 0) ||
     (-m1^3 - m1 m4^2 < 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 < 0) ||
     (m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 == 0 && -m1 (-m2 m4 + m1 m5) - m4 m7 (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
       ((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))^2 < 0) ||
     (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 == 0 && (m1^2 + m4^2) (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
       ((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))
         ((-m1 + m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0)) &&
   ((-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 > 0 && m1^2 m2 m4 + m2 m4^3 - m1^3 m5 - m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^3 - m1 m4^2 > 0) ||
     (-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 < 0 && m1^2 m2 m4 + m2 m4^3 - m1^3 m5 - m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^3 - m1 m4^2 < 0) ||
     ((m1^2 + m4^2)^2 > 0 && -m1 (-m1^2 - m4^2)^2 (-m2 m4 + m1 m5) < 0))) &&
! ((-m2 m4 + m1 m5 == 0 && m2^2 m4 - m1 m2 m5 == 0 && m2 m4 m5 - m1 m5^2 == 0 && m2 m4 m8 - m1 m5 m8 == 0 && m2 (m2 m7 - m1 m8) - m5 (-m5 m7 + m4 m8) > 0 &&
     -m2 m4 + m1 m5 == 0 && -m1 m2 - m4 m5 > 0) || (m2 m4 - m1 m5 == 0 && -m2^2 m4 + m1 m2 m5 == 0 && -m2 m4 m5 + m1 m5^2 == 0 &&
     -m2 m4 m8 + m1 m5 m8 == 0 && m2 (-m2 m7 + m1 m8) - m5 (m5 m7 - m4 m8) > 0 && m2 m4 - m1 m5 == 0 && m1 m2 + m4 m5 > 0))) ||
(-m3 m5 m7 + m2 m6 m7 + m3 m4 m8 - m1 m6 m8 - m2 m4 m9 + m1 m5 m9 == 0 && m3^2 m5 m7 - m2 m3 m6 m7 - m3^2 m4 m8 + m1 m3 m6 m8 +
   m2 m3 m4 m9 - m1 m3 m5 m9 == 0 &&
 m3 m5 m6 m7 - m2 m6^2 m7 - m3 m4 m6 m8 + m1 m6^2 m8 + m2 m4 m6 m9 - m1 m5 m6 m9 ==
  0 &&
 m3 m5 m7 m9 - m2 m6 m7 m9 - m3 m4 m8 m9 + m1 m6 m8 m9 + m2 m4 m9^2 - m1 m5 m9^2 ==
```

- Input data: 440 Bytes
- Characterization: 664 792 Bytes (∼ 0.7MB)

» Neat examples

Example (non-flat and non-pointed cones)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Example (degree ± 2)

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

» Ongoing/Future work

* Can we push the used toolbox for $n \geq 4$?
* Is there a way to count holes? (Homology)

Thanks for attending!

More details available here
`https://arxiv.org/abs/2203.12333`