Linear Hybrid Systems are Hard

The Case of Linear Complementarity Systems and The Quest For Characterizing Q-matrices

by Khalil Ghorbal and Christelle Kozaily (Inria, France)
on November 24th 2023

Linear Complementarity Systems

Hybrid Models

Continuous-time evolution and discrete transitions

+

Discrete

Continuous

» LCS Models

Continuous-time evolution and discrete transitions

$+$

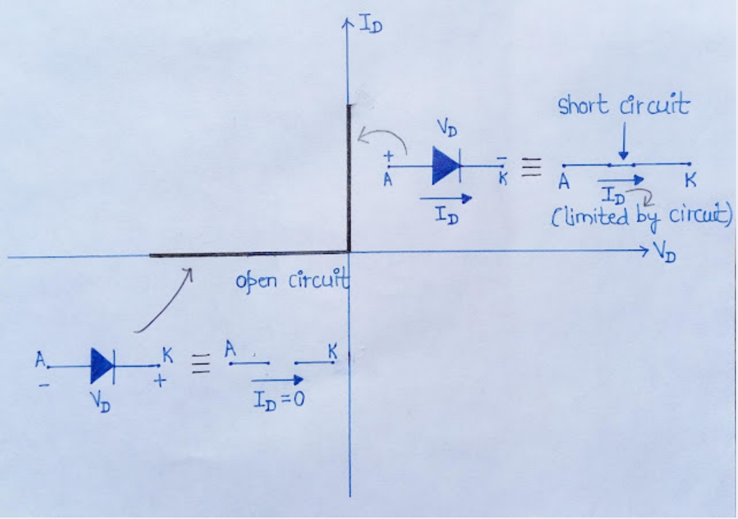
Linear Complementarity

Linear DAE

Linear DAE: $E\dot{x} = Ax$

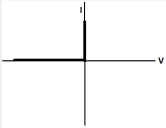
Ideal diode

1-dimentional LCP

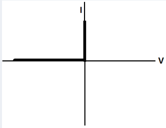


» Linear Complementarity

n-dimentional LCP



$\oplus \quad \cdots \quad \oplus$



2^n modes

$$0 \leq I \perp V \geq 0$$

if and only if

$$I_i V_i = 0 \textbf{ and } I_i, V_i \geq 0$$

» Linear Complementarity Systems (LCS)

A LCS is defined as the following system

$$
\begin{aligned}
\dot{x} &= Ax + B\lambda \\
y &= Cx + D\lambda \\
0 \leq y &\perp \lambda \geq 0
\end{aligned}
$$

* $x \in \mathbb{R}^n$ (state), $y \in \mathbb{R}^m$ (output), $\lambda \in \mathbb{R}^m$ (input)
* $\dot{x}$ stands for the time derivative of x
* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $D \in \mathbb{R}^{m\times m}$

» Machinery

Numerical integration

$$\dot{x} = Ax + B\lambda$$
$$y = Cx + D\lambda$$
$$0 \leq y \perp \lambda \geq 0$$

» Sufficient Condition For State Continuous Solution

$$\dot{x} = Ax + B\lambda$$
$$y = Cx + D\lambda$$
$$0 \leq y \perp \lambda \geq 0$$

Heemels and Schumacher 2000

If the principle minors of D are all positive then the LCS admits a unique solution continuous in x.

» Rewriting

'Switching' communities

$$\dot{x} = Ax + B\lambda$$
$$y = Cx + D\lambda$$
$$0 \leq y \perp \lambda \geq 0$$

Linear Complementarity Problems

» Linear Complementarity Problem (LCP)

A LCP(q,M) is defined as the following system

$$w = q + Mz$$
$$0 \leq w \perp z \geq 0$$

* $w, z \in \mathbb{R}^n$ are unknown
* M is a S-matrix: LCP(q, M) has a partial solution $\forall q \in \mathbb{R}^n$.
* M is a Q-matrix: LCP(q, M) has a solution $\forall q \in \mathbb{R}^n$.
* M is a P-matrix: LCP(q, M) has a unique solution $\forall q \in \mathbb{R}^n$.

Characterizing P-matrices [1958]

M is a P-matrix if and only if the 2^n principle minors of M are positive.

» Characterizing Q-matrices

Open problem

M is a Q-matrix if and only if ...

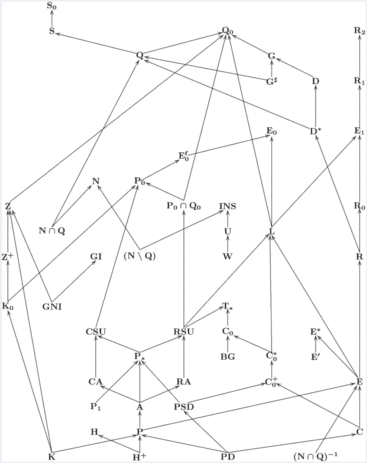
» State-of-the-art

somehow unsatisfactory...

578 J Glob Optim (2010) 46:571–580

5 Matrix class inclusion map

See Fig. 1.



» Complementarity Cones

$$w = q + Mz \qquad \rightsquigarrow \qquad q = \begin{pmatrix} I & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$

$$0 \leq w \perp z \geq 0 \qquad\qquad w, z \geq 0 \wedge w.z = 0$$

» Complementary Cones

Σ Covering problem

$$w = q + Mz \qquad \rightsquigarrow \qquad q = \begin{pmatrix} I & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}$$
$$0 \leq w \perp z \geq 0 \qquad\qquad w, z \geq 0 \wedge w.z = 0$$

* $C = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$, $a_i \in \{I_i, -M_i\}$
* If $a_i = I_i$ then $a_i' = -M_i$ (and vice-versa)
* 2^n complementarity cones C_k
* Cones are sewed along their common $(n-1)$-facets
* M is a Q-matrix if all cones cover $\mathbb{R}^n$, i.e.

$$\mathbb{R}^n \subseteq \Sigma := \cup_k C_k$$

Q-covering

» Holes

Definition (Surrounding)

A vector q is surrounded if it has a covered neighborhood. ($U \subseteq \Sigma$.)

Definition (Hole)

A hole is a maximal (with respect to set-inclusion) non-empty open connected region in $\Sigma^c := \mathbb{R}^n \setminus \Sigma$.

» Locating holes

Special Property (for all n)

The cone $\langle a_i, a_i' \rangle$ cannot be partially covered. That is either $\langle a_i, a_i' \rangle \subseteq \Sigma$ or $\langle a_i, a_i' \rangle^\circ \subseteq \Sigma^c$.

» Minimal c-cone

Locating Holes

Assume $\mathbb{R}^n \subseteq \Gamma$. Then there exists a minimal cone G rooted at a_i, a_i' for some index i and such that $G \cap \Sigma^c$ is non-empty.

Special property (for $n = 3$)

Assume $\mathbb{R}^3 \subseteq \Gamma$ and let $G = \langle a_i, a_i', a_j \rangle$ denote a minimal cone. If $\langle a_i, a_i' \rangle \subseteq \Sigma$ then either $G \subseteq \Sigma$ or a_i (or a_i') is not surrounded.

» Local Characterization

Theorem

$\mathbb{R}^3 \subseteq \Sigma$ if and only if, for all i, both a_i and a_i' are surrounded.

» Local Characterization

Symbolic Computation

Theorem

Assume $\mathbb{R}^3 \subseteq \Gamma$. $\mathbb{R}^3 = \Sigma$ if and only if, for each i, $a_i \neq 0$, $a_i' \not\simeq a_i$, a_i is self surrounded or $a_i \in \Sigma(a_i')$, and the same for a_i'.

» Q-matrices for $n = 2$

Theorem

The matrix $\begin{pmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{pmatrix}$ *is a Q-matrix if and only if*

$$\begin{aligned}
&(m_1 > 0 \wedge m_2 \geq 0 \wedge m_4 > 0)\\
\vee&(m_1 > 0 \wedge m_3 = 0 \wedge m_4 > 0)\\
\vee&(m_1 = 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 < 0 \wedge m_4 > 0)\\
\vee&(m_1 < 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 < 0 \wedge 0 > m_1 m_4 > m_2 m_3)\\
\vee&(m_1 < 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 > 0 \wedge m_2 m_3 > m_1 m_4 > 0)\\
\vee&(m_1 > 0 \wedge m_2 < 0 \wedge m_3 < 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3)\\
\vee&(m_1 > 0 \wedge m_2 < 0 \wedge m_3 > 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3)
\end{aligned}$$

» Q-matrices for $n = 2$

Theorem

The matrix $\left(\begin{smallmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{smallmatrix}\right)$ *is a Q-matrix if and only if*

$$\begin{aligned} &(m_1 > 0 \wedge m_2 \geq 0 \wedge m_4 > 0) \\ \vee&(m_1 > 0 \wedge m_3 = 0 \wedge m_4 > 0) \\ \vee&(m_1 = 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 < 0 \wedge m_4 > 0) \\ \vee&(m_1 < 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 < 0 \wedge 0 > m_1 m_4 > m_2 m_3) \\ \vee&(m_1 < 0 \wedge m_2 > 0 \wedge m_3 > 0 \wedge m_2 m_3 > m_1 m_4 > 0) \\ \vee&(m_1 > 0 \wedge m_2 < 0 \wedge m_3 < 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3) \\ \vee&(m_1 > 0 \wedge m_2 < 0 \wedge m_3 > 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3) \end{aligned}$$

Theorem

The matrix $\left(\begin{smallmatrix} m_1 & m_2 \\ m_3 & m_4 \end{smallmatrix}\right)$ *is a P-matrix if and only if*

$$m_1 > 0 \wedge m_4 > 0 \wedge m_1 m_4 > m_2 m_3 \ .$$

» Q-matrices for $n = 3$

```
 0 &&
(m2 m4 - m1 m5) (-m3 m4 + m1 m6) + (-m2 m7 + m1 m8) (m3 m7 - m1 m9) + (m5 m7 - m4 m8) (-m6 m7 + m4 m9) >
 0 &&
((-m3 m8 + m2 m9 > 0 && -m6 m8 + m5 m9 > 0) || (-m3 m8 + m2 m9 < 0 && -m6 m8 + m5 m9 < 0)) &&
! (! -m1 == -m4 == 0 && ((m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7)) (m4 (m1 - m2 m4 + m1 m5) m7 - m1 (m1 m2 m7 + m4 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0 ||
      (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^3 - m1 m4^2 > 0 && m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 > 0) ||
      (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^3 - m1 m4^2 < 0 && m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 < 0) ||
      (-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 == 0 && -m1 (-m2 m4 + m1 m5) - m4 m7 (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
        (m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7))^2 < 0) || (-m1^3 - m1 m4^2 == 0 && -m4 (m1^2 + m4^2) m7 > 0 &&
        (m1 m4 m7 - m1 (m1^2 + m4^2 + m4 m7)) (m4 (m1 - m2 m4 + m1 m5) m7 - m1 (m1 m2 m7 + m4 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0)) &&
    ((m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 > 0 && m1^3 + m1 m4^2 > 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0) ||
      (m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 < 0 && m1^3 + m1 m4^2 < 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0) ||
      ((m1^2 + m4^2)^2 > 0 && -m1 (-m1^2 - m4^2)^2 (-m2 m4 + m1 m5) < 0)) &&
    (((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))
        ((-m1 + m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0 ||
      (-m1^3 - m1 m4^2 > 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 > 0) ||
      (-m1^3 - m1 m4^2 < 0 && -m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 < 0) ||
      (m1^2 m2 m7 + m2 m4^2 m7 - m1^3 m8 - m1 m4^2 m8 == 0 && -m1 (-m2 m4 + m1 m5) - m4 m7 (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
        ((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))^2 < 0) ||
      (-m1^2 m2 m4 - m2 m4^3 + m1^3 m5 + m1 m4^2 m5 == 0 && (m1^2 + m4^2) (m1 m2 m7 + m4 m5 m7 + (-m1^2 - m4^2) m8) > 0 &&
        ((m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (m1^2 + m4^2 - m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8))
          ((-m1 + m2 m4 - m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8) + (-m2 m4 + m1 m5) (-m1 m2 m7 - m4 m7 - m4 m5 m7 - (-m1^2 - m4^2) m8)) < 0)) &&
    ((-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 > 0 && m1^2 m2 m4 + m2 m4^3 - m1^3 m5 - m1 m4^2 m5 > 0 && -m1^3 - m1 m4^2 > 0) ||
      (-m1^2 m2 m7 - m2 m4^2 m7 + m1^3 m8 + m1 m4^2 m8 < 0 && m1^2 m2 m4 + m2 m4^3 - m1^3 m5 - m1 m4^2 m5 < 0 && -m1^3 - m1 m4^2 < 0) ||
      ((m1^2 + m4^2)^2 > 0 && -m1 (-m1^2 - m4^2)^2 (-m2 m4 + m1 m5) < 0))) &&
! ((-m2 m4 + m1 m5 == 0 && m2^2 m4 - m1 m2 m5 == 0 && m2 m4 m5 - m1 m5^2 == 0 && m2 m4 m8 - m1 m5 m8 == 0 && m2 (m2 m7 - m1 m8) - m5 (-m5 m7 + m4 m8) > 0 &&
      -m2 m4 + m1 m5 == 0 && -m1 m2 - m4 m5 > 0) || (m2 m4 - m1 m5 == 0 && -m2^2 m4 + m1 m2 m5 == 0 && -m2 m4 m5 + m1 m5^2 == 0 &&
      -m2 m4 m8 + m1 m5 m8 == 0 && m2 (-m2 m7 + m1 m8) - m5 (m5 m7 - m4 m8) > 0 && m2 m4 - m1 m5 == 0 && m1 m2 + m4 m5 > 0))) ||
(-m3 m5 m7 + m2 m6 m7 + m3 m4 m8 - m1 m6 m8 - m2 m4 m9 + m1 m5 m9 == 0 && m3^2 m5 m7 - m2 m3 m6 m7 - m3^2 m4 m8 + m1 m3 m6 m8 +
    m2 m3 m4 m9 - m1 m3 m5 m9 == 0 &&
  m3 m5 m6 m7 - m2 m6^2 m7 - m3 m4 m6 m8 + m1 m6^2 m8 + m2 m4 m6 m9 - m1 m5 m6 m9 ==
   0 &&
  m3 m5 m7 m9 - m2 m6 m7 m9 - m3 m4 m8 m9 + m1 m6 m8 m9 + m2 m4 m9^2 - m1 m5 m9^2 ==
```

» Q-matrix with flat cones

Example

Consider $-M_1 = (-2, -4, -3)$, $-M_2 = -e_1$, and $-M_3 = (1, 1, 1)$. The c-cones $\langle I_1, -M_2, I_3 \rangle$ and $\langle I_1, -M_2, -M_3 \rangle$ are two flat cones and therefore the following 3×3 matrix is not an R_0-matrix. It is however a Q-matrix.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & -1 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad .$$

» Ongoing/Future work

* Does a similar covering property hold for $n \geq 4$?
* Is there a way to count holes? (Homology)
* Consider a local P-covering around $\mathbb{Im}(C)$ for LCS.

Thanks for attending!

More details available here
https://arxiv.org/abs/2203.12333